第7講　２次関数のグラフと２次方程式

§1　２次方程式の解法

要点整理 と 公式

要点 1　2次方程式

「2次方程式」… 整理すると $ax^2+bx+c=0$ （a，b，c は定数，$a \neq 0$）の形で表される方程式を，「xの２次方程式」という。

(ex) $2x^2-7x-4=0$，　$2x^2-4=0$

要点 2　因数分解による解法

数の性質「2つの数 A，B について，$A \times B=0$　ならば　$A=0$　または　$B=0$」を利用する。

(ex) $x^2-x-2=0$　を解く。

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x-2)=0$

よって，$x+1=0$　または　$x-2=0$　　したがって，解は　$x=-1$，2

要点 3　平方根による解法

$x^2=C$ （Cは0以上の定数）のとき，x は C の平方根である。つまり $x=\pm\sqrt{C}$　である。

(ex) $x^2-2=0$　を解く。

$x^2=2$　　　したがって，解は　$x=\pm\sqrt{2}$

要点 4　2次方程式の解の公式

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　…①　について，左辺を「　　　　　」すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

よって，①は $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$　　つまり　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

よって　$b^2-4ac \geqq 0$　のとき　$x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　　したがって　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2次方程式の解の公式

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac\geqq 0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の2次方程式を解け。

(1)　$x^2-5x-36=0$　　(2)　$x^2+12x+36=0$　　(3)　$3x^2-7x-6=0$

(4)　$x^2-12=0$　　(5)　$2x^2-5x+1=0$　　(6)　$x^2+2x-1=0$

Point Pickup

２次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解法

①　左辺の「　　　　　　」を考える。

②　$ax^2+c=0$（xの係数が0）の形のときは，「　　　　　　」の利用を考える。

③　2次方程式の「　　　　　　」　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　の利用。

x の係数が偶数のときの解の公式

2次方程式において　ax^2+＿＿＿$x+c=0$　の形のとき，その解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

2 次方程式の解の公式　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　において，$b=2b'$　とおくと

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2　２次方程式の実数解の個数

要点整理 と 公式

要点５　２次方程式の判別式と実数解の個数

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　…①　の左辺を平方完成し，さらに変形すると，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\quad\cdots②$$

となる。右辺の分子「b^2-4ac」について，

$b^2-4ac>0$ のとき　　②は　$x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　より　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

よって，方程式①は，２つの「　　　　　　」（実数の解のこと）をもつ。

$b^2-4ac=0$　のとき　　②は　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$　より　$x+\dfrac{b}{2a}=0$　　よって　$x=-\dfrac{b}{2a}$

よって，方程式①は，ただ１つの実数解をもつ。

この1つの解を「　　　　　」という。

$b^2-4ac<0$ のとき　　②を満たす実数xは存在しない。

よって，方程式①は実数解をもたない。

b^2-4ac を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　　　　」といい，「　　　　」で表す。

よって，以下のことがいえる。

■ 2次方程式の実数解の個数

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は，$D=b^2-4ac$　とおくと以下。

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる2つの実数解をもつ

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　ただ1つの実数解（重解）をもつ

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(i) $x^2+4x+1=0$　(ii) $x^2-3x+3=0$　(iii) $9x^2+6x+1=0$

(2)　2 次方程式　$3x^2+4x+m=0$　が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を定めよ。

Point Pickup

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解の個数

$\Longrightarrow$　判別式　$D=b^2-4ac$ の「　　　　」を調べる。

D ＿＿＿ $\Longleftrightarrow$ 異なる＿＿＿の実数解　$x=$ ＿＿＿＿＿＿ をもつ

D ＿＿＿ $\Longleftrightarrow$ ＿＿＿の実数解（＿＿＿）　$x=$ ＿＿＿ をもつ

D ＿＿＿ $\Longleftrightarrow$ 実数解を＿＿＿＿

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{解答}

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ ２次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

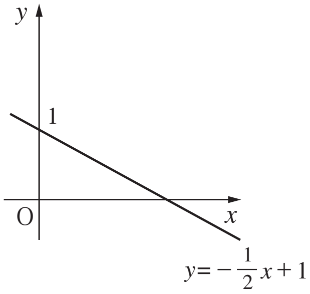
要点整理 と 公式

要点 6 グラフと x 軸の共有点

x 軸上の点は，その y 座標が「　　　」である。

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，

$y=f(x)$ で $y=0$ となる x の値，つまり方程式 $f(x)$ ______ の解である。



（ex）$y=-\dfrac{1}{2}x+1$ と x 軸との共有点の座標について

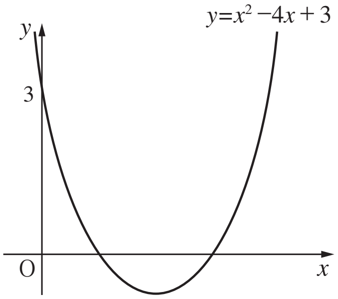
方程式 $-\dfrac{1}{2}x+1$ ______ を解くと，$x=2$

よって，共有点の座標は ______

要点 7 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，

2次方程式 ax^2+bx+c ______ の解である。



（ex）$y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の座標について

2次方程式 x^2-4x+3 ______ を解くと

$(x-1)(x-3)=0$ より $x=$ ______

よって，共有点の座標は ______

グラフは右図。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の2次関数のグラフとx軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+2x-8$　　(2)　$y=-x^2+6x+4$　　(3)　$y=4x^2-4x+1$

Point Pickup

２次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフと x 軸の共有点の座標

⟹　y 座標は「　　　」であり，

x 座標は，2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の「　　　　　」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 2次関数のグラフとx軸の位置関係

要点整理 と 公式

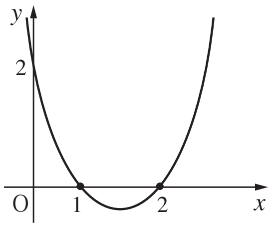
要点8　2次関数のグラフとx軸の位置関係と共有点の個数

2次関数　$y=x^2-3x+2$ のグラフとx軸の位置関係は，

右図のように「　　　　　　　　　　　　」。

2つの「　　　　　　」のx座標は，2次方程式 x^2-3x+2＿＿＿＿の

「　　　　　　　　　」$x=1$，2である。



2次関数　$y=-x^2+6x-9$ のグラフとx軸の位置関係は，

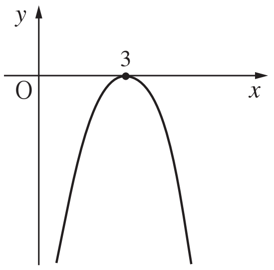
右図のように共有点をただ1つもつ。

このとき，2次関数のグラフは，x軸と「　　　　　　」といい，

その共有点を「　　　　　」という。

接点のx座標は，2次方程式 $-x^2+6x-9$＿＿＿＿の

「　　　　　」$x=3$ である。



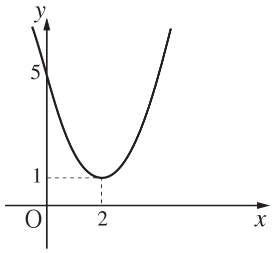
2次関数　$y=x^2-4x+5$　のグラフは，右図のように

x軸と「　　　　　　　　　　　」。

このとき，2次方程式 x^2-4x+5＿＿＿＿を解の公式で解くと

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$　となり，根号の中が

マイナスとなる。よってこの方程式は「　　　　　　　　　　　　」。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

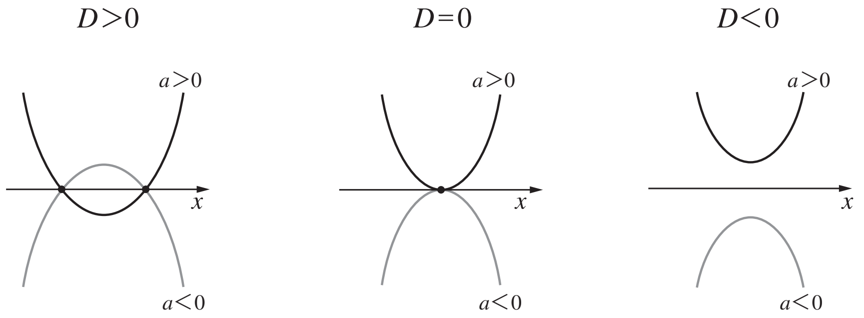
2次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフと x 軸の位置関係は，

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の「　　　　　　　　　」を調べることでわかり，

その個数は，判別式 $D=$＿＿＿＿＿＿の符号によって決定する。

■ 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　と x 軸の位置関係は，$D=b^2-4ac$　とすると以下。



異なる2点で交わる　　接する　　共有点をもたない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　次の2次関数のグラフとx軸の位置関係を調べよ。

(i)　$y=2x^2-5x+2$　　(ii)　$y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$　　(iii)　$y=x^2+6x+10$

(2)　2次関数　$y=x^2+2x+m$　のグラフがx軸と異なる2点で交わるとき，定数mの値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフとx軸の位置関係

$\Longrightarrow$ $D=$________ とおき，Dの「　　　」を調べる。

D____ $\Longleftrightarrow$ ____________

D____ $\Longleftrightarrow$ ______

D____ $\Longleftrightarrow$ __________

（上の2つをまとめて）D____ $\Longleftrightarrow$ __________

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1　次の2次方程式を解け。

(i)　$3x^2+5x-2=0$　　$x=$ [アイ], $\dfrac{[ウ]}{[エ]}$

(ii)　$5x^2-6x-1=0$　　$x=\dfrac{[オ]\pm\sqrt{[カキ]}}{[ク]}$

2　2次方程式　$2x^2-x+1=0$　の判別式を D とすると　$D=$ [ケコ] である。

よってこの2次方程式の実数解の個数は [サ] 個である。

3　2次関数　$y=-x^2+2x+3$　のグラフとx軸の共有点のx座標は　$x=$ [シ], [スセ] である。

4　2次関数　$y=x^2+6x+9$　のグラフとx軸の位置関係は [ソ] である。[ソ] にあてはまるものを次の①～③から選べ。

①　異なる２点で交わる　　②　接する　　③　共有点はない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　２次関数のグラフと２次方程式

1

（1）$x^2-5x-36=0$　$(x-9)(x+4)=0$　$x=9,\ -4$

（2）$x^2+12x+36=0$　$(x+6)^2=0$　$x=-6$

（3）$3x^2-7x-6=0$　$(3x+2)(x-3)=0$　$x=-\dfrac{2}{3},\ 3$

（4）$x^2-12=0$　$x^2=12$　$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

（5）$2x^2-5x+1=0$　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

（6）$x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

2

（1）与えられた方程式の判別式をDとする。

(i)　$D=4^2-4\cdot1\cdot1=12>0$ より ２個

(ii) $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$ より ０個

(iii) $D=6^2-4\cdot9\cdot1=0$ より １個

（2）この方程式の判別式をDとすると，$D=4^2-4\cdot3\cdot m=16-12m$

異なる２つの実数解をもつための条件は　$D>0$

よって　$16-12m>0$　より　$m<\dfrac{4}{3}$

3

（1）２次方程式　$x^2+2x-8=0$　を解くと　$(x+4)(x-2)=0$　より　$x=-4,\ 2$

よって共有点の座標は　$(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　2次方程式　$-x^2+6x+4=0$　を解くと

$$x^2-6x-4=0 \quad \text{より} \quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-4)}}{1}=3\pm\sqrt{13}$$

よって，共有点の座標は　$(3-\sqrt{13},\ 0)$，$(3+\sqrt{13},\ 0)$

(3)　2次方程式　$4x^2-4x+1=0$　を解くと　$(2x-1)^2=0$　より　$x=\frac{1}{2}$

よって，共有点の座標は　$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

4

(1)　(i)　$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9>0$　より，x軸と異なる２点で交わる

(ii)　$D=(-1)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0$　より，x軸と接する

(iii)　$D=6^2-4\cdot1\cdot10=-4<0$　より，x軸と共有点をもたない

(2)　$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m$　とすると，グラフがx軸と異なる２点で交わるための条件は

$D>0$　である。

よって　$4-4m>0$　より　$m<1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1 次の2次方程式を解け。

(i)　$3x^2+5x-2=0$　　$x=$ アイ , $\dfrac{ウ}{エ}$

(ii)　$5x^2-6x-1=0$　　$x=\dfrac{オ\pm\sqrt{カキ}}{ク}$

2 2次方程式　$2x^2-x+1=0$　の判別式を D とすると　$D=$ ケコ である。
よってこの2次方程式の実数解の個数は サ 個である。

3 2次関数　$y=-x^2+2x+3$　のグラフとx軸の共有点のx座標は　$x=$ シ , スセ である。

4 2次関数　$y=x^2+6x+9$　のグラフとx軸の位置関係は ソ である。ソ にあてはまるものを次の①～③から選べ。

①　異なる２点で交わる　　②　接する　　③　共有点はない

{解答}

1 (i)　ア　－　　イ　2　　ウ　1　　エ　3

(ii)　オ　3　　カ　1　　キ　4　　ク　5

2 ケ　－　　コ　7　　サ　0

3 シ　3　　ス　－　　セ　1

4 ソ　②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。